POTENTIEL ELECTROSTATIQUE

I. Circulation du champ électrostatique

1) Définition

Considérons une courbe Γ liant deux point A et B. Par définition, la circulation élémentaire sur cette courbe d'un champ électrostatique $\vec{E}$ s'écrit : $\boxed{dC = \vec{E}.\vec{dl}}$ où $\vec{dl}$ désigne un déplacement élémentaire le long de la courbe AB. La circulation de $\vec{E}$ le long de Γ s'écrit : $\boxed{C = \int_\Gamma dC = \int_\Gamma \vec{E}.\vec{dl}}$.

2) Expression pour une charge ponctuelle

Soit une charge ponctuelle q placée en un point fixe O de l'espace. Le champ électrostatique créé par cette charge en un point M de l'espace s'écrit : $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\,\mathrm{OM}^3}\overrightarrow{OM}$

La circulation élémentaire de $\vec{E}$ vaut : $dC = \vec{E}.\vec{dl} = \vec{E}.\overrightarrow{dOM} = \frac{q.\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{dOM}}{4\pi\varepsilon_0\,\mathrm{OM}^3} = \frac{q.OM.dOM}{4\pi\varepsilon_0\,\mathrm{OM}^3} = \frac{q.dOM}{4\pi\varepsilon_0\,\mathrm{OM}^2} = \frac{q.d(-\frac{1}{OM})}{4\pi\varepsilon_0}$

soit $\boxed{dC = -(\frac{q.}{4\pi\varepsilon_0\,\mathrm{OM}})}$

La circulation de $\vec{E}$ de A vers B sur la courbe Γ s'écrit : $\boxed{C = \int_\Gamma dC = \int_{A(\Gamma)}^{B} -d(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 OM}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{OA} - \frac{1}{OB})}$.

Propriété :

La circulation de $\vec{E}$ ne dépend pas du chemin suivi entre A et B : $C = \int_{A(\Gamma)}^{B} dC = \int_{A(\Gamma')}^{B} dC = \int_{A}^{B} dC$ avec Γ et Γ' deux chemins différents menant de A vers B. Ainsi **sur un contour fermé (A=B) la circulation de $\vec{E}$ est nulle** : $C = \int_A^A dC = \oint dC = 0$: **on dit que la circulation du champ électrostatique est conservative.**

3) Expression pour une distribution quelconque

Le principe de superposition permet d'obtenir le champ $\vec{E}$ créé par une distribution de charges D par l'addition des effets des parties élémentaires de la distribution ($\vec{E} = \sum_i \vec{E_i}$ pour une distribution discontinue ; $\vec{E} = \int_D \vec{dE}$ pour une distribution continue). Pour chacune de ces partitions, la propriété précédente est vraie donc : **La circulation de tout champ électrostatique est conservative.**

Conséquence : une ligne de champ électrostatique ne peut avoir la forme d'une boucle fermée sur elle-même. En effet, la circulation de $\vec{E}$ sur cette boucle est non nulle (à moins que le champ ne soit nul sur toute la boucle ou non défini en certains points).

II. Potentiel électrostatique

1) Potentiel créé par une charge ponctuelle

On a établi précédemment que pour une charge ponctuelle $dC = \vec{E}.\overrightarrow{dOM} = -d(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 OM})$.

On peut écrire $\boxed{dC = \vec{E}.\overrightarrow{dOM} = -dV}$ où V **est un champ scalaire appelé potentiel électrostatique**.

Le potentiel créé en M par la charge q placée en 0 est défini à une constante additive près : $V(M)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 OM}+k$. Le choix usuel est de supposer V nul lorsque le point M est infiniment loin de la charge q : $\lim_{OM\to\infty} V(M)=0 \Rightarrow k=0$.

On retiendra pour une charge ponctuelle q placé en O, le champ crée au point M s'écrit : $\boxed{V(M)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 OM}}$

2) Potentiel créé par une distribution de charges

Par principe de superposition on obtient :

- ***Pour une distribution discontinue*** :

- ***Pour une distribution continue :***

- *Volumique* :

- *Surfacique :*

- *Linéique :*

<u>Attention</u> : la convention V=0 à l'infini n'est plus valable pour des distributions de charges illimitées.

3) Relation champ $\vec{E}$ - potentiel V

On appelle gradient de la fonction scalaire V et on note $\overrightarrow{grad}V$ la quantité vérifiant : $dV=\overrightarrow{grad}V.\overrightarrow{dOM}$.
D'après la relation $\vec{E}.\overrightarrow{dOM}=-dV$ liant le champ et le potentiel électrostatiques, on peut écrire :

$$\boxed{\vec{E}=-\overrightarrow{grad}V}$$

Ainsi la circulation du champ $\vec{E}$ entre A et B s'écrit : $C=\int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dOM}=-\int_A^B \overrightarrow{grad}V.\overrightarrow{dOM}=-\int_A^B dV=V_A-V_B$.

Sur un contour fermé on retrouve le fait que la circulation de $\vec{E}$ est conservative : $C=\oint \vec{E}.\overrightarrow{dOM}=-\oint dV=0$.

En coordonnées cartésiennes : $\vec{E}=-\overrightarrow{grad}V=-\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{y,z}\vec{e}_x+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{x,z}\vec{e}_y+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{x,y}\vec{e}_z\right]$

En coordonnées cylindriques : $\vec{E}=-\overrightarrow{grad}V=-\left[\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{\theta,z}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_{r,z}\vec{e}_\theta+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{r,\theta}\vec{e}_z\right]$

4) Topographie et symétrie du potentiel

a) Propriétés de symétrie

Comme pour le champ, les propriétés de symétrie du potentiel se déduisent de celles de la distribution de charges.
Soit P un point de la distribution de charges et P' son symétrique par rapport à un plan π : $P' = sym_{\pi}(P)$.
Soit M un point de l'espace et M' son symétrique par rapport au plan π : $M' = sym_{\pi}(M)$.

- **Plan de symétrie**

Pour un plan de symétrie (π_S) de la distribution de charges ($\rho(P') = \rho(P)$) on a $\boxed{V(M) = V(M')}$.

- **Plan d'antisymétrie**

Pour un plan d'antisymétrie (π_{AS}) de la distribution de charges ($\rho(P') = -\rho(P)$) on a $\boxed{V(M) = -V(M')}$.

b) Topographie

- **Equipotentielle**

On appelle équipotentielle une surface dont tous les points ont la même valeur du potentiel soit V(M)=constante.

Exemple : les surfaces équipotentielles d'une charge ponctuelle placée en O sont des sphères centrées en O.

- **Propriétés**

Les surfaces équipotentielles sont normales aux lignes de champ électrostatique.

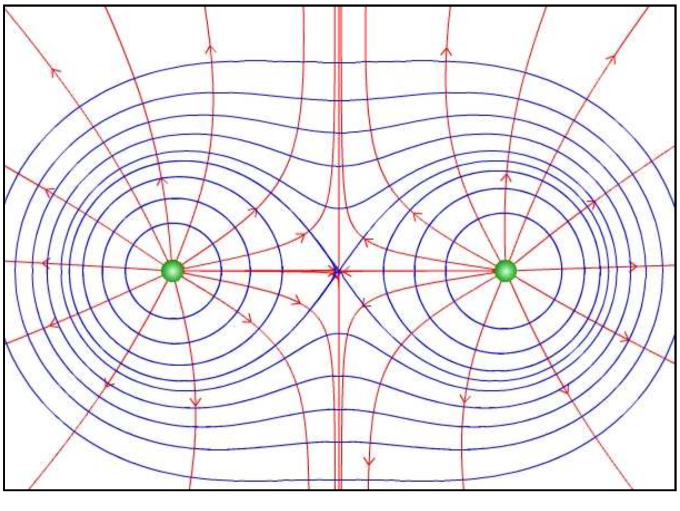
☞ Démontrer cette affirmation : ...

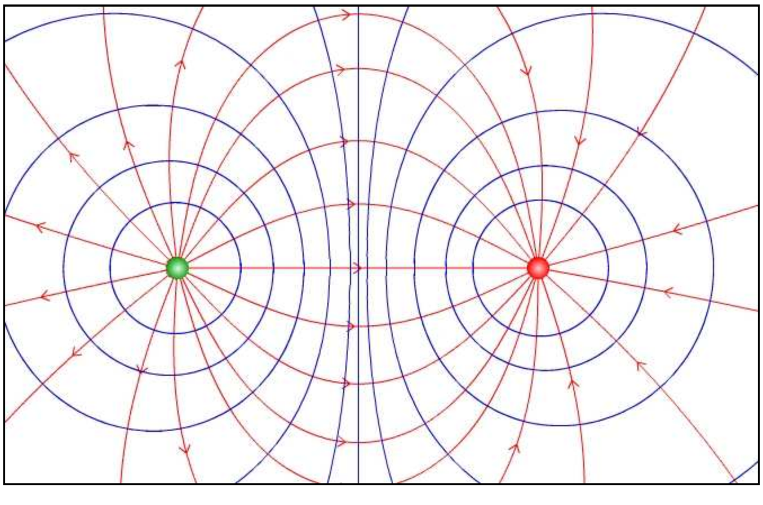
Les lignes de champ électrostatique sont orientées dans le sens des potentiels décroissants.

☞ Démontrer cette affirmation : ...

Si le potentiel est maximal en un point (charge ponctuelle q>0) les lignes de champ divergent de ce point. Si le potentiel est minimal en un point (charge ponctuelle q<0) les lignes de champ convergent vers ce point.

- **Exemples**





III. Energie potentielle électrostatique

1) Travail d'une force électrostatique

Considérons une particule portant la charge q, en mouvement dans une région de l'espace où règne un champ électrostatique $\vec{E}$ créé par une distribution de charges quelconque.
Cette particule est soumise à la force électrostatique : $\vec{F} = q.\vec{E}$

Considérons un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ de la charge q.
Le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ s'écrit : $\delta W = \vec{F}.\overrightarrow{dl} = q.\vec{E}.\overrightarrow{dl} = q.(-dV) = -q.dV$

Ainsi entre deux points A et B, le travail de la force $\vec{F}$ s'écrit **:** $W_{A\to B} = \int_A^B \delta W = \int_A^B -q dV = q(V_A - V_B)$

Comme la circulation de $\vec{E}$, le travail de la force électrostatique est indépendante du chemin suivi : la force électrostatique est conservative.

2) Énergie potentielle d'une charge ponctuelle dans un champ électrostatique extérieur

Le travail de la force électrostatique s'identifie à la variation d'une fonction d'état, notée E_p, appelée énergie potentielle : $\delta W = -d(qV) = -dE_p$ soit $\boxed{E_p = qV}$ (définie à une constante additive près).

D'après la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ il en résulte que la force électrostatique $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle : $\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p}$. Cette relation traduit mathématiquement **le concept de force conservative**.

3) Énergie potentielle d'interaction d'un système de deux charges ponctuelles

Considérons une charge ponctuelle q' placée en P.
Le potentiel créé par cette charge en un point M s'écrit : $V'(M) = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 PM}$

L'énergie potentielle d'une charge q placée en M vaut alors : $E_p = qV'(M) = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 PM}$

Cette énergie potentielle correspond également à l'énergie potentielle de la charge q' placée en P dans le potentiel électrostatique $V(P)$ créé par la charge q placée en M : $E'_p = q'V(P) = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0 MP}$

On obtient une expression parfaitement symétrique $\boxed{E_p = E'_p = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 PM}}$ **: il s'agit de l'énergie potentielle d'interaction entre les deux charges ponctuelles q et q'** placées respectivement en M et P.